Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.
6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
8. **2p.** Sprawdzić, że
   (a) $B(p, q + 1) = B(p, q)\,\dfrac{q}{p + q}$,
   (b) $B(p, q) = B(p, q + 1) + B(p + 1, q)$.
9. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p + q)\,B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

<u>Def.</u> **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1 - t)^{q-1}\,dt, \quad p > 0,\ q > 0.$$

Witold Karczewski